

## V. Fonction de transfert du système bouclé

①

0. Fonction de transfert: définition

1. Échantillonnage du système à commander (5.2.1)

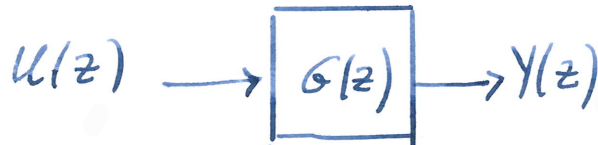
2. Transformation des pôles par échantillonnage (5.2.3)

3. Algorithme de commande

4. Fonctions de transfert en boucle fermée  $\rightarrow$  à vérifier  $\rightarrow$  régulation

5. Fonctions de sensibilité

### 0. Introduction



$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kh) z^{-k}$$

Définition: la fonction de transfert  $G(z)$  est la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $\{g(kh)\}$  d'un système discret, au repos, linéaire et causal.

Comme

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{\infty} u(lh) g(kh - lh)$$

on a

$$Y(z) = U(z) G(z)$$

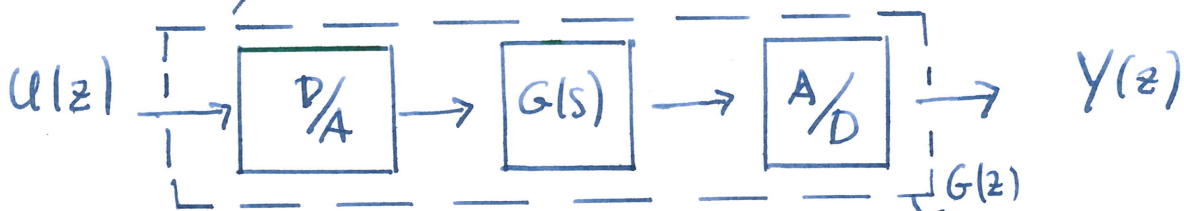
$$\{u(kh)\} * \{g(lh)\} = \{y(kh)\}$$

Nous nous intéressons aux réponses impulsionnelles telles que

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

### 1. Échantillonnage du système à commander

Soit le schéma, où  $G(s)$  est supposé connu:



Comment déterminer  $G(z)$  ?

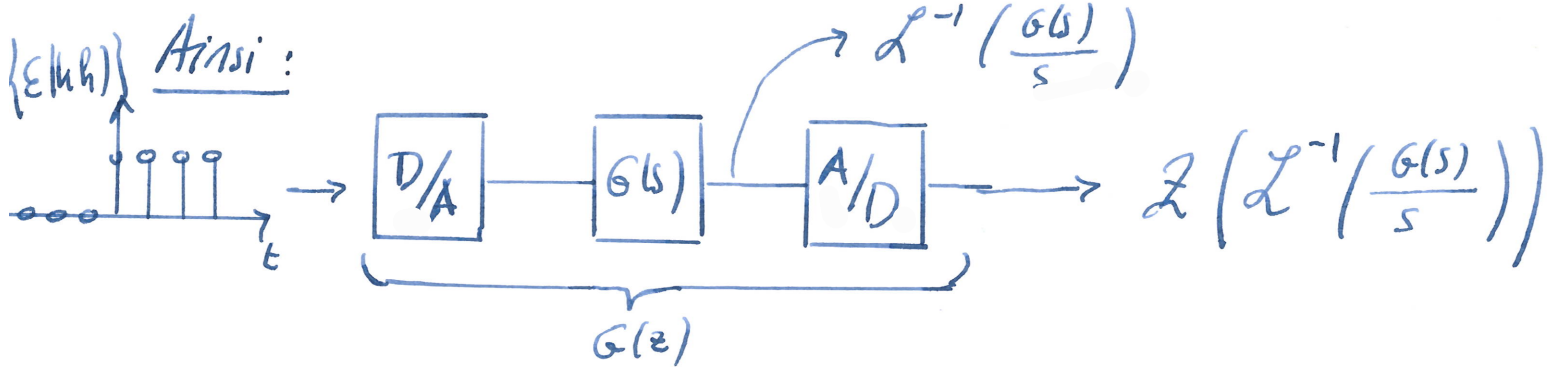
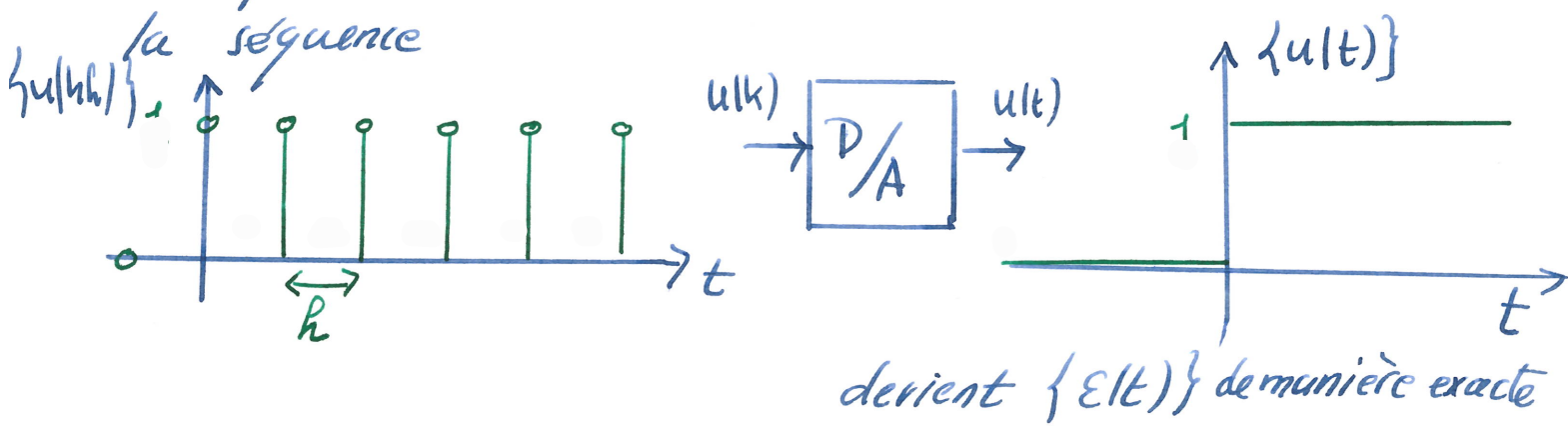
(2)

Astuce: La relation  $G(z) \leftrightarrow G(s)$

ne dépend pas du type d'entrée appliquée pour autant que cette entrée soit suffisamment générique, c.-à-d. pour autant qu'elle excite tous les modes du système.

$\{e(k)\}$    $\rightarrow G(s) \rightarrow \{y(t)\} = ?$   $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \{y(t)\}$

Remarque Grâce au maillon d'ordre 0 (ZOH)



⚠  $\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\cdot))$  signifie la discrétisation  $t = kh$  entre  $\mathcal{L}^{-1}$  et  $\mathcal{Z}$ .

$$\frac{z}{z-1} G(z) = \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right)$$

En conséquence:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right)$$

aussi écrit sous la forme  $G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right)$

Exemple

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

3

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2}$$

$$\alpha = \left. \frac{s}{s(s+2)} \right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \left. \frac{s+2}{s(s+2)} \right|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) - \frac{1}{2} e^{-2t} \quad t = kh \quad \triangle!$$

$$\mathcal{Z} \left( \frac{1}{2} \{ \varepsilon(kh) \} - \frac{1}{2} \{ e^{-2kh} \} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-2h}}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-2h}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-e^{-2h}} = \frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}e^{-2h} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}{z-e^{-2h}} \end{aligned}$$

$$G(z) = \frac{-\frac{1}{2}e^{-2h} + \frac{1}{2}}{z-e^{-2h}}$$

Faire très attention à ne pas tomber dans le piège suivant :

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \not\leftrightarrow \quad \frac{z}{z-e^{-2h}}$$

C'est ok avec les signaux, mais pas avec les fonctions de transfert. munies d'un maintien d'ordre 0



## 2. Transformation des pôles par échantillonnage

En effectuant  $(1 - z^{-1})z^{-1} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$

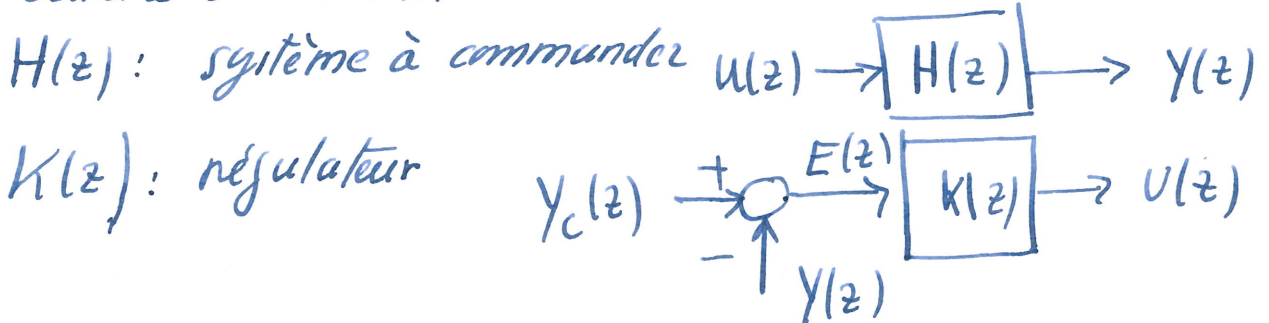
on constate, et on démontre, qu'à tout pôle  $s_i$  il y correspond un pôle

$$z_i = e^{s_i h}$$

## 3. Algorithme de commande

Convention, on utilise  $H(z)$  plutôt que  $G(z)$ .

Boucle ouverte et notation



$$H(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Algorithme:

$$K(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

avec d'autres coefficients,  $m, n, a_i, b_j$ .

## Implantation de l'algorithme

Forme standard

1° Écrire en puissances négatives de  $z$  et coefficient 1 pour le premier terme du dénominateur

$$K(z) = \frac{b_0 z^{-n+m} + b_1 z^{-n+m+1} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

On a la relation  $K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \leftarrow \text{sortie du régulateur} \quad (5)$   
 $\leftarrow \text{entrée du régulateur}$

$$\frac{B(z)}{A(z)} \triangleq K(z) \quad u(k) + a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \dots + a_n u(k-n) = b_0 e(k-n+m) + b_1 e(k-n+m-1) + \dots + b_m e(k-n)$$

il faut alors isoler  $u(k)$ :

$$u(k) = -a_1 u(k-1) - a_2 u(k-2) - \dots - a_n u(k-n) + b_0 e(k-n+m) + b_1 e(k-n+m-1) + \dots + b_m e(k-n)$$

Rappel: opérateur  $q^{-1}$   $u(z) \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow y(z)$   
 que fait-il sur la sortie par rapport à l'entrée?

$$\{u(kh)\} \rightarrow \boxed{q^{-1}} \rightarrow \{y(kh)\} \quad \{y(kh)\} = q^{-1} * \{u(kh)\}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{y(z)}{u(z)} \rightarrow y(k) = u(k-1)$$

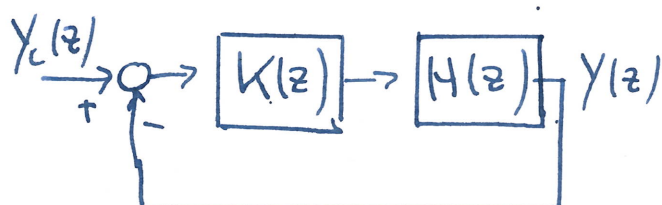
Un système est au repos lorsque les nombres  $u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  et les conditions initiales  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$  sont tous nuls,

Au niveau de l'algorithme, les  $u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  sont des conditions initiales du programme qu'il faut de forcer à zéro pour garantir un système au repos.

\* tout comme les  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ .

## 4. Fonctions de transfert du système bouclé

### 4.1 Asservissement



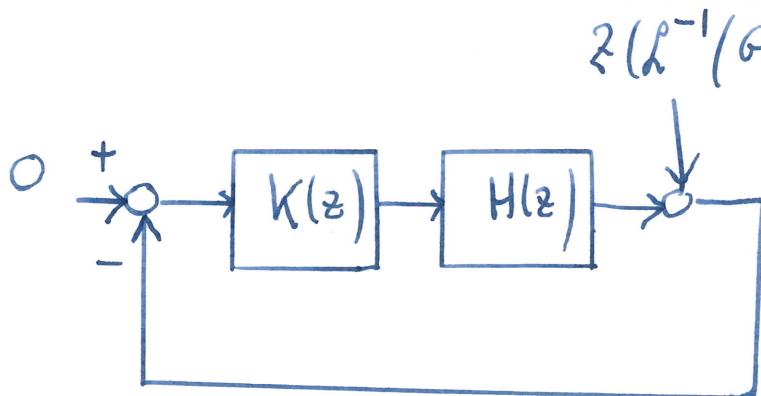
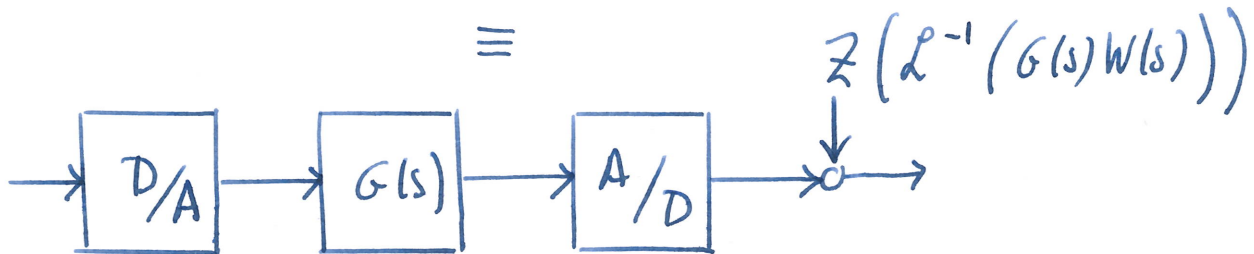
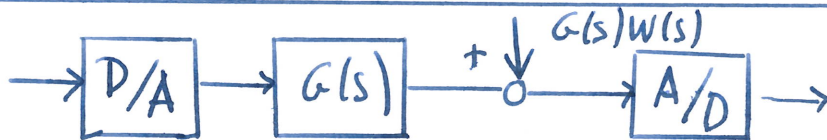
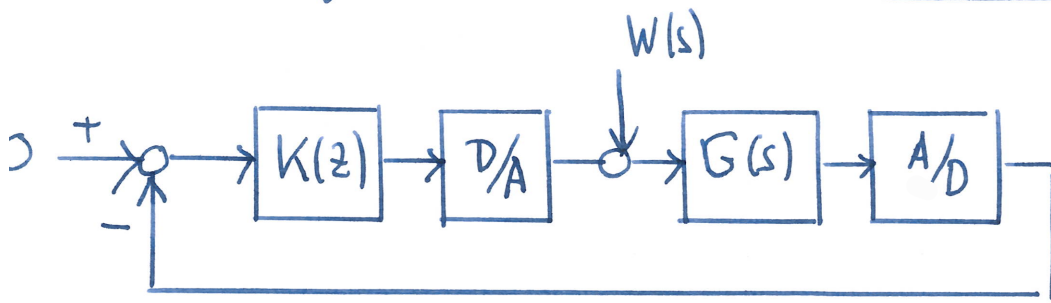
$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$

$$\begin{aligned} Y &= HU \\ U &= (Y_c - Y)K \end{aligned} \quad \left| \rightarrow \begin{aligned} Y &= (Y_c - Y)HK \\ (1 + HK)Y &= KY_c \end{aligned} \right.$$

## 4.2 Régulation

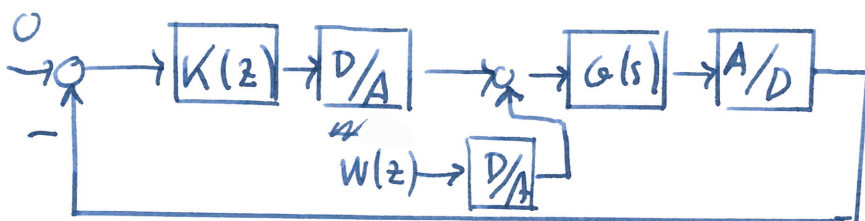
## Perturbation analogique

(6)



$$Y(z) = \frac{1}{1 + K(z)H(z)} Z(L^{-1}(W(s)G(s)))$$

Perturbation avant A/D



$$Y(z) = \frac{H(z)W(z)}{1 + K(z)H(z)}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial W} = \frac{1}{1 + KH} \quad \text{sensibilité}$$

$$T = \frac{KH}{1 + KH} \quad \text{sensibilité complémentaire}$$